

Mikroökonomie und Mathematik (mit Lösungen)

6 Optimierungen (Maxima und Minima)

Schritte der Optimierung:

- ① Setzen Sie die **1. Ableitung** der zu optimierenden Funktion = **0**, und berechnen Sie **Q**.
- ② Ermitteln Sie die **2. Ableitung** der zu optimierenden Funktion:
 - falls 2. Ableitung > 0 → Q ist ein **Minimum**.
 - falls 2. Ableitung < 0 → Q ist ein **Maximum**.

6.1 Maximierung des Gesamterlöses (TE)

$$\text{Gesamterlös} = 400Q - 8Q^2$$

Ermitteln Sie den grössten Gesamterlös (Q und TE).

6.2 Maximierung des Gewinns ($p = TE - TK$)

$$\text{Gesamterlös} = 400Q - 8Q^2$$

$$\text{Gesamtkosten} = 3000 + 60Q$$

Ermitteln Sie den grössten Gewinn (Q und π).

6.3 Maximierung des Gesamterlöses (TE)

$$\text{Marktnachfrage: } P = 12 - \frac{Q}{3}$$

Ermitteln Sie den grössten Gesamterlös (Q and TE).

6.4 Minimierung der Durchschnittskosten (DK) und der Grenzkosten (GK)

$$\text{Durchschnittskosten} = 30 - 1.5Q + 0.05Q^2$$

6.41 Ermitteln Sie die Menge Q der kleinsten Durchschnittskosten.

6.42 Ermitteln Sie die Menge Q der kleinsten Grenzkosten.

6.43 Erklären Sie das Ergebnis 6.42 im Verhältnis zu 6.41 (→ Verhältnis GK zu DK).

6.5 Optimierung eines Monopolisten

Ein Monopolist steht folgender Nachfrage gegenüber:

$$\text{Preis} = 30 - 0.65Q;$$

seine Kostenfunktion beträgt:

$$\text{Gesamtkosten} = 0.5Q^2 + 10Q + 50$$

Ermitteln Sie die Menge Q ...

6.51 der kleinsten Durchschnittskosten;

6.52 des grössten Gesamterlöses;

6.53 des grössten Gewinns (π).

6.6 Minimierung der Grenzkosten (GK)

$$\text{Grenzkosten} = 0.03Q^3 + 0.01Q^2 - 5Q + 30$$

Ermitteln Sie die kleinsten Grenzkosten (Q and GK).

6.7 Maximierung des Gewinns ($p = TE - TK$)

$$\text{Gesamterlös} = 400Q - 8Q^2$$

$$\text{Gesamtkosten} = \frac{1}{3}Q^3 - 2Q^2 + 3Q + 600$$

Ermitteln Sie den grössten Gewinn (Q und π).

→ [Lösungen. Hier anklicken!](#)

Lösungen *Mikroökonomie* und Mathematik

6 Optimierungen (Maxima und Minima)

6.1 Maximierung des Gesamterlöses (TE)

- $TE = 400Q - 8Q^2$
 $(TE)' = GE = 400 - 16Q = 0$
 $16Q = 400$
 $Q = 25$
- $(TE)'' = -16 \rightarrow$ Maximum, weil $(TE)'' < 0$
- **$TE = 400 \cdot 25 - 8 \cdot 25^2 = 10000 - 5000 = 5000$**

6.2 Maximierung des Gewinns ($p = TE - TK$)

- $\pi = TE - TK = 400Q - 8Q^2 - 3000 - 60Q = -8Q^2 + 340Q - 3000$
- $\pi' = -16Q + 340 = 0$
 $16Q = 340$
 $Q = 21.25$
- $\pi'' = -16 \rightarrow$ Maximum, weil $\pi'' < 0$
- **$p = -8 \cdot 21.25^2 + 340 \cdot 21.25 - 3000 = -3612.5 + 7225 - 3000 = 612.5$**

6.3 Maximierung des Gesamterlöses (TE)

- $P = 12 - \frac{Q}{3}$
 $TE = P \cdot Q = 12Q - \frac{1}{3}Q^2$
- $(TE)' = GE = 12 - \frac{2}{3}Q = 0$
 $\frac{2}{3}Q = 12$
 $Q = 18$
- $(TE)'' = -\frac{2}{3} \rightarrow$ Maximum, weil $(TE)'' < 0$
- **$TE = 12 \cdot 18 - \frac{1}{3}18^2 = 216 - 108 = 108$**

6.4 Minimierung der Durchschnittskosten (DK) und der Grenzkosten (GK)

- 6.41
- $DK = 30 - 1.5Q + 0.05Q^2$
 $(DK)' = -1.5 + 0.1Q = 0$
 $0.1Q = 1.5$
 $Q = 15$
 - $(DK)'' = 0.1 \rightarrow$ Minimum, weil $(DK)'' > 0$
- 6.42
- $TK = DK \cdot Q = 30Q - 1.5Q^2 + 0.05Q^3$
 $(TK)' = GK = 30 - 3Q + 0.15Q^2$
 $(GK)' = -3 + 0.3Q = 0$
 $0.3Q = 3$
 $Q = 10$

6.4	<ul style="list-style-type: none"> $(GK)'' = 0.3 \rightarrow$ Minimum, weil $(GK)'' > 0$ <p>6.43 Die GK-Kurve durchstösst die DK-Kurve von unten her. Deshalb ist die Menge Q der kleinsten GK geringer als die Menge Q der kleinsten DK.</p>
6.5	<p>Optimierung eines Monopolisten</p> <p>6.51</p> <ul style="list-style-type: none"> $DK = 0.5Q + 10 + \frac{50}{Q}$ $(DK)' = 0.5 - 50Q^{-2} = 0$ $0.5 = 50Q^{-2}$ $0.5Q^2 = 50$ $Q^2 = 100$ $Q = 10$ $(DK)'' = 100Q^{-3} = \frac{100}{1000} = 0.1 \rightarrow$ Minimum, weil $(DK)'' > 0$ <p>6.52</p> <ul style="list-style-type: none"> $TE = P \cdot Q = 30Q - 0.65Q^2$ $(TE)' = GE = 30 - 1.3Q = 0$ $1.3Q = 30$ $Q = 23.1$ $(TE)'' = -1.3 \rightarrow$ Maximum, weil $(TE)'' < 0$ <p>6.53</p> <ul style="list-style-type: none"> $\pi = TE - TK = 30Q - 0.65Q^2 - 0.5Q^2 - 10Q - 50 = -1.15Q^2 + 20Q - 50$ $\pi' = -2.3Q + 20 = 0$ $2.3Q = 20$ $Q = 8.7$ $\pi'' = -2.3 \rightarrow$ Maximum, weil $\pi'' < 0$
6.6	<p>Minimierung des Grenzkosten (GK)</p> <ul style="list-style-type: none"> $GK = 0.03Q^3 + 0.01Q^2 - 5Q + 30$ $(GK)' = 0.09Q^2 + 0.02Q - 5 = 0$ $Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0.02 \pm \sqrt{(0.02)^2 + 4 \cdot 0.45}}{0.18}$ $Q_1 = \frac{-0.02 + 1.34}{0.18} = 7.3$ $[Q_2 = \frac{-0.02 - 1.34}{0.18} = -7.6 < 0]$ $(GK)'' = 0.18Q + 0.02 = 0.18 \cdot 7.3 + 0.02 = 1.3$ $Q = 7.3 \rightarrow (GK)'' = 1.3 \rightarrow Q$ ist ein Minimum, weil $(GK)'' > 0$. $[Q_2 < 0; Q$ ist negativ; Q muss positiv sein.] $\rightarrow Q = 7.3$ $GK = 0.03 \cdot 7.3^3 + 0.01 \cdot 7.3^2 - 5 \cdot 7.3 + 30 = 5.7$

6.7 Maximierung des Gewinns ($p = TE - TK$)

$$\pi = TE - TK = 400Q - 8Q^2 - \frac{1}{3}Q^3 + 2Q^2 - 3Q - 600$$

$$= -\frac{1}{3}Q^3 - 6Q^2 + 397Q - 600$$

$$\pi' = -Q^2 - 12Q + 397 = 0$$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 + 4 \cdot 397}}{-2} = \frac{12 \pm \sqrt{1732}}{-2}$$

$$Q_1 = \frac{12 - 41.6}{-2} = 14.8 \quad [Q_2 = \frac{12 + 41.6}{-2} = -26.8 < 0]$$

$$\bullet \quad \pi'' = -2Q - 12 = -2 \cdot 14.8 - 12 = -41.6$$

Falls $Q = 14.8 \rightarrow \pi'' = -41.6 \rightarrow Q_1$ ist ein Maximum, weil $(TK)'' < 0$.

[$Q_2 < 0$; $\rightarrow Q$ muss positiv sein.]

$$\rightarrow \mathbf{Q = 14.8}$$

$$\bullet \quad p = -\frac{1}{3} \cdot 14.8^3 - 6 \cdot 14.8^2 + 397 \cdot 14.8 - 600 = \mathbf{2880.8}$$

[→ Zurück zu den Aufgaben. Hier anklicken!](#)